#### Лекция № 3

###### Основные постановки задачи исследования операций.

Здесь нам потребуются понятия: операция, математическая модель операции, критерий эффективности.

Вспомним: **Операция** (О) – любое мероприятие (или система действий) объединенное единым замыслом и направленное к достижению определенной цели;

**Математическая модель** (ММ): - математические соотношения, устанавливающие количественные связи между условиями операции, параметрами решения и исходом операции (критерием эффективности).

ММ грубо делятся на 2 класса: аналитические и статистические.

- для аналитических математических моделей характерно установление формульных, аналитических зависимостей между параметрами, записанных в любом виде: алгебраического уравнения, дифференциального уравнения, уравнения с частными производными и т.д. Аналитическую математическую модель удается получить для простых операций с небольшим числом элементов.

- статистическое моделирование производится при операциях большого масштаба, при большом числе факторов, в том числе и случайных.

**Критерий эффективности** (Е) – количественный показатель успешности операции.

###### 1.1. Детерминированный случай постановки задачи исследования операций

Эта постановка уточняет постановку по общей математической модели, приведенной соотношениями (1) на лекции № 2.

Итак, пусть имеется некоторая операция О, т.е. управляемое мероприятие. Эффективность О задаётся критерием Е, который требуется обратить в максимум.

Предположим, что математическая модель операции построена, т.е. возможно вычисление значения Е при любом принятом решении и для любой совокупности условий О.

Рассмотрим простой случай: все факторы, от которых зависит успех операции, делятся на 2 группы:

* заданные, заранее известные факторы (*условия проведения операции*)

 , ,...,

1 2

на которые мы влиять не можем;

* зависящие от нас факторы (*элементы решения*) определенных пределах можем выбирать.

*x*1 , *x*2 ,..., которые мы в

Этот случай (при таких группах факторов) называется

*детерминированным*.

Причём под «заданными условиями»

 , ,...,

понимаются не только

числа, но и функции, в частности, ограничения, наложенные на элементы

1 2

решения. Также и

Таким образом,

*x*1 , *x*2 ,..., могут быть не только числами, но и функциями.

*E*  *E* , ,...;*x* , *x* ,...

(1)

1 2 1 2

Так как математическая модель построена, будем считать что по (1) всегда можно вычислить Е. Тогда задачу исследования операций можно математически сформулировать так:

1 2

При заданных условиях

 , ,...,

найти такие элементы

решения максимум.

*x*1 , *x*2 ,...,

которые обращают критерий Е в

Это типичная математическая задача, относящаяся к классу вариационных

задач. Методы их решения в математике подробно разработаны.

Простейший метод: дифференцировать по

*x*1 , *x*2 ,...,

и приравнять к нулю и

полученную систему решить. Однако этот метод имеет ограниченное применение, потому что

:

1. когда

*x*1 , *x*2 ,...,

много, то в системе алгебраических уравнений,

полученных от дифференцирования и приравнивания нулю, получается много уравнений и решение системы сложно;

1. когда на

*x*1 , *x*2 ,...,

наложены ограничения, часто extr находится не в

точке, где производные обращаются в нуль, а на границе области возможных решений.

Возникает специфическая для исследования операций задача

«поиска экстремума *при наличии ограничений*», не укладывающаяся в схему вариационных методов;

1. производных может не существовать, например, если изменяется дискретно и сама функция Е имеет особенности.

*x*1 , *x*2 ,...,

Общих математических методов нахождения экстремумов функций

любого вида при наличии произвольных ограничений не существует. Однако для случаев, когда функция и ограничения обладают определенными свойствами математика предлагает ряд специальных методов [см. лекцию

№1].

###### 1.2 Оптимизация решения в условиях неопределенности.

Пусть эффективность О зависит от 3 категорий факторов (а не от 2х, как в предыдущем случае):

- условия 1 , 2 ,..., ;

- неизвестные условия

*у*1 , *у*2 ,..., ;

Тогда

- элементы решения

*x*1 , *x*2 ,..., которые необходимо выбрать.

*E*  *E* , ,...; *у* , *у* ,...; *x* , *x*

,...

(2)

1 2 1 2 1 2

В (2) параметры любом решении.

*у*1 , *у*2 ,...,

неизвестны, а значит неизвестен и Е при

Но задача выбора решения стоит по-прежнему. Её можно

сформулировать так:

При заданных  , ,...,

1 2

с учетом неизвестных факторов

*у*1 , *у*2 ,...,

найти

такие элементы решения

*x*1 , *x*2 ,...,

которые *ПО ВОЗМОЖНОСТИ* обращали

бы в максимум показатель эффективности Е.

Это – уже не чисто математическая задача (см. «по возможности»(!)).

Наличие факторов

*у*1 , *у*2 ,...,

переводит нашу задачу в другую категорию: она

превращается в задачу о выборе решения в условиях неопределенности.

Любое решение, принятое в условиях неопределенности, хуже решения, принятого во вполне определенной ситуации. Наше дело – сообщить своему решению в наибольшей возможной мере черты разумности. Решение, принятое в условиях неопределенности, но на основе математических расчетов, будет всё же лучше решения, принятого наобум [Вспомним ироническое определение И.О., данное Т.Л.Саати].

Применяемые здесь методы решения зависят от того, какова природа

неизвестных факторов них располагаем.

*у*1 , *у*2 ,...,

и какими ориентировочными сведениями о

а) наиболее простым и благоприятным для расчётов является случай,

когда

*у*1 , *у*2 ,...,

представляют собой случайные величины (или же случайные

функции) с известными статистическими характеристиками их распределения. В этом случае для оптимизации решения применяют один из двух приёмов:

* искусственное сведение к детерминированной схеме;
* оптимизация в среднем.

Первый из них предусматривает: замену случайных факторов

*у*1 , *у*2 ,...,

не случайными (как правило, математическими ожиданиями). Этот прием применяется в грубых, ориентировочных расчетах, когда диапазон

случайных изменений величин

*у*1 , *у*2 ,...,

сравнительно мал.

Второй прием: («оптимизация в среднем») применяется, когда

случайность величин

*у*1 , *у*2 ,...,

весьма существенна и замена их

математическими ожиданиями приводит к большим ошибкам.

Рассмотрим подробно. Пусть нам известно распределение факторов

(например, плотность распределения)

*f* *у* , *у*

,.... Предположим, то операция

выполняется много раз, причем условия случайным образом.

1

2

*у*1 , *у*2 ,...

меняются раз отразу

Какое решение

*x*1 , *x*2 ,... выбрать? Очевидно, то, при котором операция в

среднем будет наиболее эффективна, т.е. математическое ожидание Е будет максимально:

*E*  *M* [*E*] 

... *E* ,

,...; *y* , *y* ,...; *x* , *x*

,... *f* *y* , *y* ,...*dy dy* ...

   1 2

1 2 1 2

1 2 1 2

Такая оптимизация называется «оптимизаций в среднем».

б) наиболее трудным для исследования является тот случай

неопределенности, когда неизвестные функции

*у*1 , *у*2 ,...,

не могут быть

изучены и описаны с помощью статистических методов; их законы распределения или не могут быть получены или таких законов распределения вовсе не существует. Это бывает, когда явление не обладает свойством статистической устойчивости.

В таких случаях рекомендуется рассмотреть весь диапазон возможных

условий

*у*1 , *у*2 ,... и составить представление о том, какова Е в этом диапазоне

и как влияют на нее неизвестные условия. При этом задача И.О. приобретает новые методологические особенности.

Действительно, рассмотрим случай, когда Е зависит от

, 2



1

,..., ; *x*1 , *x*2

,...

и ряда

*у*1 , *у*2

- факторов нестатистической природы, о

которых никакой информации нет, а можно делать только предположения.

Зафиксируем мысленно параметры

*у*1 , *у*2 ,..., придадим им вполне

определенные значения

*у*  *y*1 , *у*

 *y*1 ,..., и переведем их в категорию

заданных условий

1

2

1

2

1 , 2 ,.... Для этих условий мы можем найти

соответствующее оптимизационное решение

*x*1 , *x*2 ,.... Его элементы, кроме

заданных условий

1

2

2

 , ,...,

очевидно, будут зависеть ещё и от того, какие

частные значения мы придали условиям

1 2

1

*у*  *y*1 , *у*

 *y*1 ,... .

*x*  *x*  , ;...; *y*1 , *y*1 ,...;

1 1 1 2 1 2

*x*  *x*  , ;...; *y*1 , *y*1 ,....

2 2 1 2 1 2

Такое решение, оптимальное для данной совокупности условий

*у*  *y*1 , *у*

1

1

2

 *y*1 ,...

(и только для неё) называется локально–оптимальным

(л.о.). Совокупность л.о.р. для всего диапазона условий

2

*у*1 , *у*2 ,...

даёт

представление о том, как мы должны были бы поступить, если бы

неизвестные условия

*у*1 , *у*2 ,...; были нам в точности известны. В данном

случае следует предпочесть не решение, строго оптимальное для каких-то условий, а компромиссное решение, которое, не будучи, может быть, строго оптимальным ни для каких условий, оказывается приемлемым в целом диапазоне условий. Обычно окончательный выбор компромиссного решения осуществляется человеком, который, опираясь на расчеты, может после анализа возможных вариантов, выбрать окончательное решение.

Своеобразный случай возникает в так называемых конфликтных

ситуациях, когда

*у*1 , *у*2 ,...

зависят не от объективных обстоятельств, а от

активно действующего противника. При выборе решений в таких случаях применяется математический аппарат теории игр. Модели конфликтных ситуаций, изучаемых в теории игр, основаны на предположении, что мы имеем дело с разумным и дальновидным противником, всегда выбирающим своё поведение наихудшим для нас (наилучшим для себя) способом. Такая идеализация конфликтной ситуации может подсказать нам наименее рискованное, «перестраховочное» решение, которое необязательно принимать, но полезно иметь в виду.

###### Оценка операции по нескольким показателям.

На практике чаще встречаются случаи, когда надо рассматривать

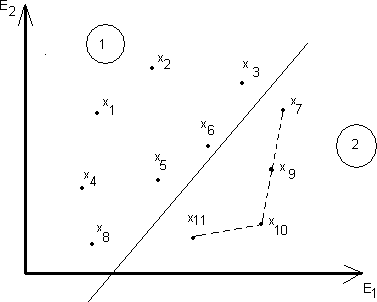
несколько показателей эффективности:

*E*1 , *E*2 ,..., *Ek* . Стремление достичь

оптимума по двум или нескольким из них одновременно – некорректная постановка задачи.

Однако количественный анализ эффективности может оказаться полезным – отбросить явно нерациональные варианты решений.

1. Пример (отбрасывание нерациональных вариантов)



*Е*1 -вероятность выполнения боевой задачи (например);

*Е*2 -стоимость израсходованных средств.

1-область «неконкурентноспособных решений». Решение может быть

выбрано из подмножества компромисса.

*x*7 , *x*9 , *x*10 , *x*11

путем соответствующего

или

1. Возможно построение обобщенного показателя:

*E*  *E*1  *E*2 ...*Em*

*Em*1    *Ek*

(а)

3) *E*  *a*1*E*1  *a*2 *E*2  ...  *ak Ek*

(б)

где

*a*1 ,*a*2 ,...,*ak*

* мера важности показателей.

Недостаток составных критериев: недостаток эффективности по одному показателю всегда можно скомпенсировать за счет другого (например, малую вероятность выполнения боевой задачи – за счет малого расхода боеприпасов, и т.д.).

*Шутка* Л.Толстого: Критерий оценки человека в виде дроби: числитель - истинные достоинства человека, знаменатель - его мнение о себе. Несостоятельность критерия: человек почти без достоинств, зато совсем без

самомнения, будет иметь *ценность* 

*E*  *почтинет достоинств*  

*человексовсем безсамомнения*

При многих

*E*1 , *E*2 ,..., *Ek*

можно положить ограничения:

*E*2  *e*2 ;...*Em*  *em* ; *Em*1  *em*1; *Ek*  *ek* .

И сперва оптимизировать по

*Е*1 ; тогда эти критерии переводятся в

разряд ограничений (условий)

*E*2 ,..., *Em* ; *Em*1 , *Ek*

  , ; ,... .

При такой постановке все показатели, кроме одного, *Е*1

2 *m m*1 *k*

переводятся в

разряд заданных условий операции. Варианты, не укладывающиеся в эти границы, отбрасываются, как неконкурентоспособные.

Так или иначе, при любом способе формализации, задача количественного обоснования решения по нескольким показателем остается не до конца определенной, и окончательный выбор решения определяется волевым актом «командира».

Дело исследователя - предоставить в его распоряжение достаточное количество данных, позволяющих ему всесторонне оценить преимущества и недостатки каждой вариации решения и, опираясь на них, принять окончательное решение.

###### Контрольные вопросы

* 1. Приведите определения следующих основных понятий ИСО: операция, математическая модель операции, критерий эффективности.
  2. Опишите детерминированный случай постановки задачи ИСО.
  3. К какой группе факторов ИСО относятся условия проведения операции (варьируемые, не варьируемые)?
  4. Когда возникает при ИСО задача «поиска экстремума при наличии ограничений»?
  5. При каких случаях операционного исследования возникает задача оптимизации решения в условиях неопределенности?
  6. Какие варианты построения обобщённого критерия эффективности могут рассматриваться при оценке операции по нескольким показателям?